西安交通大學

理工女手稿 第Ⅰ卷

——遇事不决学点数学

第一编　微积分

20230809-

主要符号.

符号	含义
$\mathbb{R}$	实数集
$\mathbb{Q}$	有理数集
$\mathbb{C}$	复数集
$\mathbb{N}$	自然数集
$\mathbb{Z}$	复数集.
$[a,b]$	闭区间
(a,b)	开区间
$A\backslash B$	$A\cap\bar{B}$
sin, cos, tg	三角函数.
sinh, cosh, tgh	双曲函数.
ln, lg, log	对数(e,10,2).
$\lim\limits_{x\to a}$	双侧极限
$\lim\limits_{x\to a^+}, \lim\limits_{x\to a^-}$	右,左极限.
$0/0$, ∞/∞, $0\times\infty$, 0^0, 1^∞, ∞^0	未定式.

符号	含义.
$\sim$	渐近
$f'(x)$	导数
$f''(x), f^{(2)}(x)$	二阶导数.
$f^{(n)}(x)$	n阶导数
$\mathcal{L}(x)$	线性化
df	微分
$F(x)\big\|_a^b$	$F(b)-F(a)$.
$\int_a^b f(x)\,dx$	定积分
$\int f(x)\,dx$	不定积分
I_n	递归积分值
$\{a_n\}$	数列
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$	无穷级数
$P_N(x)$	N阶Taylor展开.
$R_N(x)$	N阶余项.
j	$\sqrt{-1}$
$\bar{z}$	共轭
$\|z\|$	模
$Re(z)$, $Im(z)$.	实部、虚部.
$\arg z$	辐角.

目录

第一章 函数……2
第二章 论学……4
第三章 极限导论…5

第一章. 函数、图像和直线.

§1.1 函数.

函数：输入 ⟶ 唯一输出.

$D=\{$输入$\}$.　　$R=\{$输出$\}$.

1.1.1 区间

$[a,b]$ 闭.　　(a,b) 开.

1.1.2 求定义域

D 并不总是 $\mathbb{R}$ …… $\mathbb{R}=$实数集.

$f(x)=\sqrt{x}$. $\Rightarrow D(f)=[0,+\infty)$.

$g(x)=tg(x) \Rightarrow D(g)=\mathbb{R}\setminus\{\frac{k\pi+1}{2}\pi\}$.

$$h(x)=\frac{\ln(x+8)\sqrt{26-2x}}{(x-2)(x+19)}$$

$\Rightarrow x>-8,\ x\le 13,\ x\ne 2,\ x\ne -19$.

$D(h)=(-8,13]\setminus\{2\}$.

1.1.3 用图像求值域.

略.

1.1.4 垂线检验.

一条垂线不能与一个函数图像相交两次.

§1.2 反函数.

$f^{-1}(x)$: $f(x)\to x$.

f^{-1} 并不总是存在.

· f^{-1} 的性质：

(1) $D(f)=R(f^{-1})$.　　(2) $R(f)=D(f^{-1})$.

(3) $f(x)=y \iff f^{-1}(y)=x$.

1.2.1 水平线检验.

一条水平线与 $f(x)$ 图像相交至多1次

$\Rightarrow \exists f^{-1}(x)$.

1.2.2 求反函数.

关于 $y=x$ 镜像对称.

1.2.3 限制定义域.

$f(x)=x^2$　　$\Rightarrow$ 不存在 $f^{-1}(x)$.

$g(x)=x^2\ (x\ge 0)$　　$\Rightarrow g^{-1}(x)=\sqrt{x}$.

$h(x)=x^2\ (x\le 0)$　　$\Rightarrow h^{-1}(x)=-\sqrt{x}$.

1.2.4 反函数的反函数.

$\forall x \in D(f),\ f^{-1}(f(x)) = x.$

$\forall y \in R(f).\ f(f^{-1}(y)) = y.$

§1.3 函数的复合概念.

例. $g(x) = 2^x,\ h(x) = 5x^4,\ j(x) = 2x-1.$

求 $f(x) = g \circ h \circ j\,(x).$

$$f(x) = g \circ h(2x-1)$$
$$= g(5(2x-1)^4)$$
$$= 2^{5(2x-1)^4}.$$

例. 分解 $f(x) = \dfrac{1}{tg(5\ln(x+3))}.$

令 $k(x) = x+3,\quad j(x) = \ln x.$

$h(x) = tg(5x).\quad g(x) = x^{-1}.$

$$f(x) = g \circ h \circ j \circ k\,(x).$$

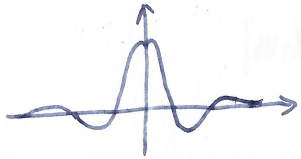
· 一般地, $g \circ h(x) \neq h \circ g(x).$

· 当函数与 $g(x) = x-a$ 复合时,
其作用为令函数向右平移 a.

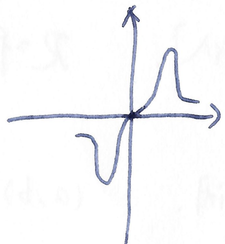
§1.4 奇偶性

奇函数: 关于 $(0,0)$ 中心对称.

偶函数: 关于 $x=0$ 轴对称.



偶.



奇.

§1.5 函数的图像.

略.

§1.6 常见函数.

1.6.1 多项式: $f(x) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i x^i$

1.6.2 有理函数: $g(x) = p(x)/q(x).$ p, q 是多项式.

1.6.3 指、对、幂.

指数函数 $f(x) = a^x\ (a \geq 0).$

对数函数 $f(x) = \log_a x\ (a>0).$

幂函数. $f(x) = x^a.\quad a \in ???$

1.6.4 绝对值

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0. \end{cases}$$

第二章. 三角学.

§2.1 基础知识.

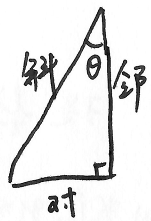
弧度: $2\pi \Leftrightarrow 360°$.

三角函数: $\sin\theta$ = 对/斜.

$\cos\theta$ = 邻/斜.

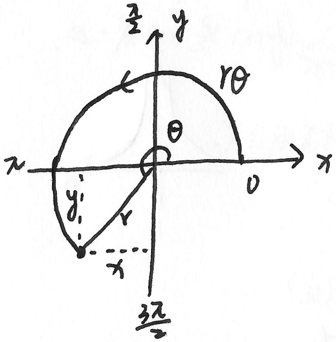
$tg\,\theta$ = 对/邻

$= \sin\theta / \cos\theta$.



§2.2 扩展定义域.

$\theta \notin [0, \frac{\pi}{2}]$ 的三角函数.



半径为r, 弧长为rθ.

$\sin\theta = y/r$, $\cos\theta = x/r$,

$tg\,\theta = y/x$.

2.2.1 ASTC方法.

用于判别四个象限的

记忆法: All, sin, Tg, Cos.

2.2.2 $[0, 2\pi]$ 以外.

$f(x) = f(x + 2k\pi)$.

§2.3 三角函数的图像

略.

§2.4 三角恒等式.

(1) $tg\,\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$. $ctg\,\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$. $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$. $\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$.

(2) 勾股定理 $\Rightarrow \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$.

$1 + tg^2\theta = \sec^2\theta$ $\quad$ $1 + ctg^2\theta = \csc^2\theta$

(3) $\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$. $\quad tg(x) = ctg(\frac{\pi}{2} - x)$

$\sec x = \csc(\frac{\pi}{2} - x)$.

(4) 和/差角: $\sin(\theta + \varphi) = \sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi$.

$\cos(\theta + \varphi) = \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi$.

第三章. 极限导论.

§3.1 极限基本思想.

考虑函数 $f(x)=x-1$, $x\neq 2$. $D(f)=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

x充分接近于2时, $f(x)$可以任意接近于1.

·严格定义: ε-δ语言.

充分近.

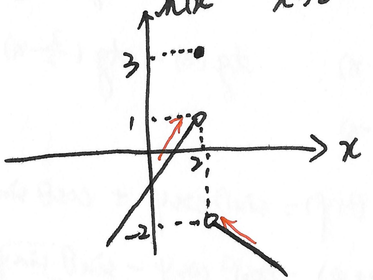
任给 $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+$, $\exists\delta$ s.t. $x\in(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$,

$|f(x)-a|<\varepsilon$, 则称 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$.

§3.2 左极限和右极限.

例: $h(x)=\begin{cases} x-1 & x<2 \\ 3 & x=2 \\ -x & x>2 \end{cases}$ 求 $x=2$处左右极限.

$\lim\limits_{x\to 2^-} h(x)=1$. $\lim\limits_{x\to 2^+} h(x)=-2$.



左/右极限: 从左/右逼近.

左右极限相等 $\Longleftrightarrow$ 极限存在.

在上例中, $\lim\limits_{x\to 2} h(x)$ 不存在.

§3.3 不存在极限

(1) 考虑 $f(x)=\frac{1}{x}$. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$.

于是 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在.

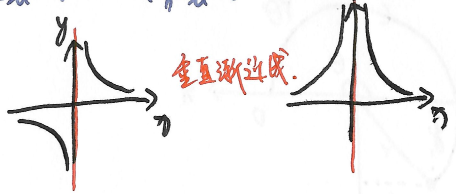
(2) 考虑 $g(x)=\frac{1}{x^2}$ $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=+\infty$.

于是 $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=+\infty$.

由此可以定义垂直渐近线:

$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 或 $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ 是 $+\infty$ 或 $-\infty$.



(3) 考虑 $h(x)=\sin(\frac{1}{x})$

$\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)$ 不存在.

证: $\forall\ 0<\varepsilon<1$, $\exists\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}$, s.t. $\sin\theta>\varepsilon$.

$\forall\delta$, $\exists k$, s.t. $2k\pi+\theta>\frac{1}{\delta}$.

令 $x=1/(2k\pi+\theta)$, 则 $x\in(0,\delta)$ 且

$\sin(1/x)=\sin(2k\pi+\theta)=\sin\theta>\varepsilon$.

故不存在.